Documento de Trabajo N° 04
Diciembre 2021

Portafolio de inversiones: elementos constitutivos.

José Antonio Chumacero
Grupo de Investigación Omega Beta Gamma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Av. Germán Amézaga 375, Lima 01

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Grupo de Investigación Omega Beta Gamma

Citación sugerida:
Chumacero, J. (2021). "Portafolio de inversiones. Elementos constitutivos". *Documento de Trabajo 04-2021*, Grupo de Investigación Omega Beta Gamma, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Serie de Documentos de Trabajo Omega Beta Gamma

El principal objetivo de la Serie de Documentos de Trabajo Omega Beta Gamma es difundir los avances de investigaciones conducentes a futuras publicaciones de artículos científicos, así como de textos resultantes del proceso de enseñanza de los profesores del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos; incluyendo publicaciones de investigadores nacionales e internacionales de otras instituciones de educación superior. La Serie de Documentos de Trabajo Omega Beta Gamma es promovido y desarrollado por un colectivo de profesores del Departamento de Economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

COMITÉ EVALUADOR

José Antonio Chumacero. Director.
Alfonso L. Ayala, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú.
Juan M. Cisneros, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú.
Hugo Sánchez, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú.

Documento de Trabajo Omega Beta Gamma, Nro. 02-2021, diciembre 2021.
International Standard Serial Number **ISSN 2312-4776**

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ciencias Económicas
Av. Germán Amézaga 375. Teléfono 619-7000, anexo 2231.
Lima 01
Perú

PORTAFOLIO DE INVERSIONES. ELEMENTOS CONSTITUTIVOS*

José Antonio Chumacero†

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Diciembre, 2021

Resumen

El presente documento de trabajo presenta la principal contribución del economista norteamericano Harry Markowitz, la teoría del portafolio. Dicha contribución se inicia con la publicación de un artículo titulado Portfolio Selection, en el año 1952 y que apareció en el Journal of Finance. Aquí se desarrolla paso a paso cómo, desde el uso de conceptos estadísticos-matemáticos, el proceso que han de seguir inversionistas y analistas para optimizar los recursos financieros en activos individuales, pero sobre todo en un portafolio o cartera, que cumplan con asegurar altas rentabilidades con mínimo riesgo utilizando para ello la estrategia de la diversificación.

Palabras claves: Mercados financieros, selección de portafolio, decisiones de inversión.
Clasificación JEL: G10, G11, G20

Abstract

This working document presents the main contribution of the American economist Harry Markowitz, the portfolio theory. This contribution began with the publication of an article entitled Portfolio Selection, in 1952, which appeared in the Journal of Finance. Here is developed step by step how, from the use of statistical-mathematical concepts, the process that investors and analysts have to follow to optimize financial resources in individual assets, but especially in a portfolio, that comply with ensuring high returns with minimal risk using the diversification strategy.

Keywords: Financial Markets, portfolio selection, investment decisions.
JEL Classification: G10, G11, G20

---

* Expreso mi agradecimiento al Mg. Alfonso Ayala Loro (docente de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos), quien revisó el presente documento. Es importante aclarar, sin embargo, que, ante la probable presencia de errores en este documento, cualquier falta es de mi exclusiva responsabilidad.

† Maestría en Economía con mención en Desarrollo Empresarial y Regional (c), Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Profesor Auxiliar del Departamento de Economía de UNMSM. Investigador asociado al Instituto de Investigaciones FCE – UNMSM. Contacto: jchumaceroc@unmsm.edu.pe.

https://orcid.org/0000-0001-8117-9441

1. Introducción

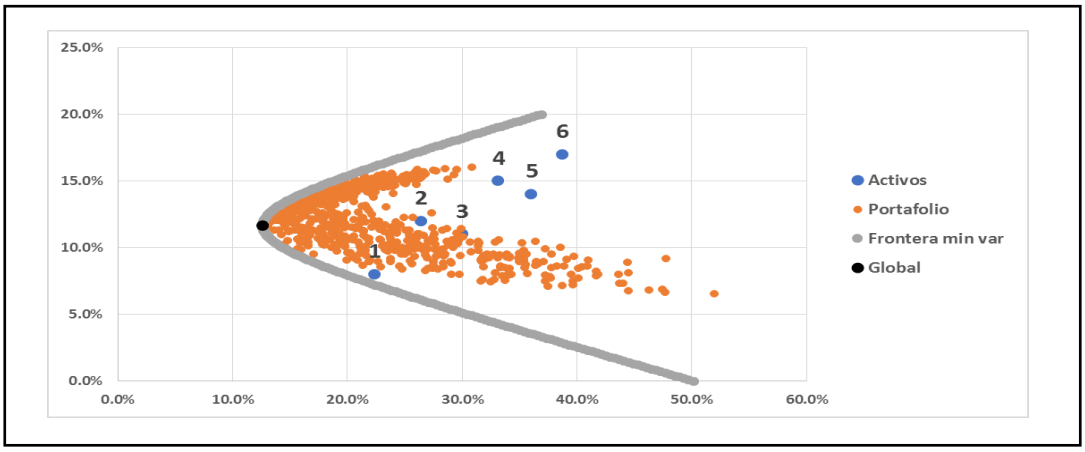
El estudio de la teoría de portafolio tiene una importancia práctica indiscutible. En el ámbito de los negocios, el dinero, el efectivo, ha de estar en constante movimiento. En el sector industrial, por ejemplo, una primera forma de movimiento lo identificamos cuando el capital inicial de los inversionistas compra maquinaria, insumos y mano de obra, ocurre luego el proceso de transformación y finalmente, el producto creado entra en la esfera de la circulación. Aquí, el precio de bien «supera el valor de sus partes constitutivas». En esta diferencia se ha generado una ganancia. Otra forma de rotar el efectivo es a través del sistema financiero. En él, las empresas tienen la opción de comercializar activos financieros como acciones y bonos con la intención de financiar sus diversos proyectos de crecimiento. Desde luego, los gerentes financieros actúan como inversionistas al tomar decisiones de *en dónde invertir* el dinero de los dueños u accionistas de la empresa, siendo la rentabilidad un criterio a considerar. Comprar acciones hoy, al precio de $ 100 por acción y que al término de un año la acción pague un dividendo de $10 por acción y el precio final de la acción es $105, le habrá generado al gerente financiero una tasa de rendimiento anual (r) efectivo del 15%:

$$r = \frac{Pf - Pi + Div}{Pi} = 0{,}15$$

Y es justamente el tema de la rentabilidad lo que evalúa un aportante al sistema privado de pensiones: ¿dónde coloco mis fondos?, ¿qué AFP ha venido ofreciendo mayores rendimientos en los últimos cinco o siete años como mínimo? Y si preguntamos de dónde los administradores de fondos de pensiones van a asegurar el pago por concepto de jubilación, la respuesta es que ellas invierten dichos aportes en activos financieros que se espera le generen el efectivo para asegurar el pago de pensiones. Así, por ejemplo, el dinero de cada uno de sus aportantes se destina a varios y diversos activos financieros constituyéndose así un *portafolio*, un portafolio de inversión. En consecuencia, la labor de los equipos de profesionales de las administradoras de pensiones está en *armar* y gestionar portafolios de inversión para cada uno de aportantes, siendo dos los elementos claves a considerar: el retorno o rentabilidad y el riesgo.

En el presente trabajo, se hace una exposición del aporte a la teoría del portafolio por parte del economista norteamericano Harry Markowitz, ganador del Premio Nobel en el año 1990. Veremos como a través de herramientas y técnicas estadísticas se puede medir el rendimiento y riesgo de activos individuales y del portafolio. Y tal como lo precisa Gitman (2000), «el objetivo del gerente de finanzas consiste en crear una cartera eficiente […] que minimice el riesgo para un nivel de rendimiento específico». Tal expresión se ve reflejada en la imagen adjunta, en la que cada punto del cuadrante representa un portafolio y que nos brinda información combinación de rentabilidad *esperada* con un nivel de riesgo (σ) asociado de un portafolio, [E(Rp), σ(Rp)].

Imagen 1.
Retorno esperado y desviación estándar de un portafolio



Nota: Datos tomados de Yahoo Finance.

2. Teoría del portafolio: una creación de Harry Markowitz

Fue Harry Markowitz, economista norteamericano, quien en un artículo titulado *Portfolio Selection*, publicado en el Journal Finance de 1952, presentó su análisis y un modelo inicial acerca de la selección de portafolios. Al final de sus estudios de doctorado, publicó *Portfolio Selection: Efficient diversification of Investments (1959)* en el cual presenta un estudio más refinado de su teoría. La expresión *portafolios eficientes* se lo debemos a él y constituye en la actualidad la base para nuevos modelos de selección de portafolios.

Para la época en que Markowitz escribe el mencionado artículo, la técnica para valorar acciones se basaba en la propuesta del economista estadounidense John Burr Williams (1900 – 1989) que consistía en el *flujo de caja descontado*. En esencia, el método del valor presente le permitía a los inversionistas individuales o institucionales, calcular el valor presente de una acción a partir del estimado de sus ingresos futuros. Solo en condiciones de certeza, el valor de una acción será el valor que se obtenga de descontar todos los dividendos futuros a una tasa de interés.

$$VP = \sum_{t=1}^{n} \frac{Dividendos_t}{(1+i)^n}$$

Markowitz observó que tanto el análisis como la ecuación para calcular el valor presente de un activo no tomaba en consideración el riesgo.

Justamente el gran aporte de Harry Markowitz fue introducir en el análisis del portafolio, un modelo que relacione el *rendimiento esperado* y la *varianza* de los rendimientos, siendo por ello que se le denomina también *modelo de media – varianza.* Haciendo uso del instrumental matemático y estadístico, demostró que la rentabilidad y el riesgo de un activo individual son distintas cuando los inversionistas agrupan variados activos financieros para formar los portafolios o carteras.

El análisis y conformación de portafolios pasa entonces por el empleo de probabilidades (para ver el rendimiento esperado, **media**); las proporciones o fracciones de la riqueza del inversor que se repartirá entre los activos del portafolio; medidas de variabilidad como la **varianza** y desviación estándar de cada activo y finalmente, medidas de asociación como la **covarianza**, que mide la interrelación de pares de activos. Asociada a la covarianza del portafolio, el **coeficiente de correlación** muestra la dirección y la fuerza de relación lineal entre pares de activos. Con estos elementos para el análisis, Markowitz construye su modelo de portafolios eficientes, al cual también se le denomina media – varianza.

A continuación, y de manera sucinta, enunciamos los supuestos en los que se basa el modelo:

1. El primer supuesto está referido al comportamiento de los inversionistas: estos presentan *aversión al riesgo*. Significa que «les interesa reducir el riesgo tanto como maximizar los retornos esperados (Sachs y Larraín,1994). ¿Implica la *aversión al riesgo* que los inversionistas eviten el riesgo? Claramente, no. La idea es que buscan compensación por asumir el riesgo.
2. La *hipótesis de los mercados eficientes*. Precisando sería asumir la existencia de mercados financieros eficientes. Según Bodie y Merton (2003) «la hipótesis de mercados eficientes es la propuesta de que el precio actual de un activo refleja plenamente la información púbica disponible acerca de los fundamentos económicos futuros que afectan el valor del activo» (p.206). Hagamos la siguiente pregunta: ¿cuál será su pronóstico con respecto al precio de las acciones de Tesla si se anuncia la fabricación de nuevos autos que no requieran gasolina ni diésel? Se espera que "el mercado reaccione" ante estos anuncios; ¿y cómo reacciona el mercado? Pues vía ajuste de precios de los activos y de esta manera se captura o refleja el efecto de las recientes noticias.
3. El *rendimiento esperado* de los activos que componen un portafolio esta representada por medio de una distribución de probabilidad que se asume normal (distribución normal). Esto significa entonces que «la media es una buena medida del rendimiento esperado cuando usted tiene un gran número de inversiones» (Dumrauf, 2010).
4. El riesgo asociado a una cartera de activos es medido por la *varianza* de los retornos (σ^2). Tanto si se analiza un activo individual o un portafolio, «una manera razonable de definir el riesgo sea centrarse en la dispersión de los rendimientos» (Graham et al.,2010). Se suele usar la *desviación estándar* como medida del riesgo y que técnicamente viene a ser la raíz cuadrada de la varianza.
5. La elección de un portafolio por parte de los inversores será aquel cuya combinación óptima minimice el riesgo para un nivel de rendimientos esperados o alternativamente, para un nivel dado de riesgo, se prefieran rendimientos mayores.

Tenga en cuenta que el desarrollo del marco teórico desarrollado por Harry Markowitz se hizo en los años cincuenta en los Estados Unidos, época en la que distintos grupos de inversionistas les interesaba poder cuantificar el riesgo al que se enfrentaban cuando "iban" por activos por los cuales se tenía "expectativa" de retorno. En palabra de Bodie y Merton (2003) «el objetivo es encontrar la cartera que ofrezca a los inversionistas la tasa de rendimiento esperada más alta para cualquier nivel de riesgo que se esté dispuesto a tolerar». Claramente, cada inversionista es distinto al igual que su nivel de aversión al riesgo.

3. Cálculo del rendimiento y riesgo de los activos financieros

El uso de la matemática y la estadística es un componente principal en el trabajo de Markowitz. Desde las primeras líneas de su artículo *Portfolio Selection*, Markowitz (1952) señala «*We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing and variance of return an undesirable thing».* Como se aprecia, la rentabilidad esperada y la varianza de la rentabilidad son las variables que ha de tomar en consideración el inversor y que Markowitz introduce en su modelo.

En la presente sección, desarrollaremos los conceptos estadísticos necesarios para entender cómo se selecciona un portafolio óptimo.

3.1. Estadísticas para un activo individual

A. Cuando se cuenta con data histórica

En la práctica de los analistas financieros, el cálculo del rendimiento de un activo es el primer paso para tener en consideración. Veamos

a. Cálculo del rendimiento de un activo.

En Graham et al. (2010) se precisa que «el rendimiento de un activo incluye el cambio en su valor (ya sea una ganancia o una pérdida) así como las distribuciones en efectivo, si las hay (como pago de dividendos o interés)». Entonces, la expresión matemática viene dada por:

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t + FE_{t+1}}{P_t}$$

Por ejemplo, una casa de juegos del distrito de Miraflores desea determinar la tasa de rendimiento de una máquina tragamonedas cuyo precio de compra hace un año fue de $ 10 000 y en la actualidad su valor de mercado es de $ 12 500; adicionalmente, durante el año generó $850 de ingresos después de impuestos. Entonces, reemplazando tenemos:

$$R = \frac{12\,500 - 10\,000 + 850}{10\,000} = 0{,}335$$

El rendimiento al final del año, digamos, el rendimiento efectivo, fue de 33,5%. Este es un rendimiento ex post, después del hecho y contrasta totalmente con lo que esperaba ganar el inversionista al inicio del año.

En el caso de una acción, resolvamos el caso inicial usando una hoja de cálculo. Se compran acciones hoy al precio de $ 100 por acción y al término de un año la acción pagua un dividendo de $10 por acción, siendo el precio final de $105; el rendimiento anual efectivo es 15%. Veamos:

$$r = \frac{Pf - Pi + Div}{Pi} = 0{,}15$$

Imagen 2.
Cálculo del rendimiento total de una acción

	A	B	C	D	E
2			En S/		
3		Precio hoy	100		
4		Precio despues un año	105		
5		Dividendo (despues de un año)	10		
6					
7		**Rendimieto total**	**0.15**		=((C5+(C4-C3))/C3)
8		Redimiento por dividendos	0.10		=C5/C3
9		Rendimiento por ganancia de capital	0.05		=(C4-C3)/C3
10					

Nota: Elaboración propia

En el caso de existir datos históricos de por ejemplo las acciones que cotizan en bolsa, los analistas suelen usan el promedio aritmético histórico como una primera aproximación para "pronosticar" el posible valor futuro. Es como que nos digan «suponga que el pasado nos dice algo útil sobre el futuro» (Graham et al., 2010).

Tabla 1.
Rendimiento anual (%)

Año	Merck Company	S&P 500
2004	-29	10.7
2005	-11.2	28.2
2006	-1.2	-21.6
2007	-36	-12.1
2008	41.8	-9.8
2009	-7.5	20.4
2010	41.3	28.7
2011	35.6	33.5
2012	24	21.8
2013	76.5	38
Promedio	**13.43%**	**13.78%**

Nota: Datos tomado de Graham et al. (2010)

En la Tabla 1, se presenta el promedio aritmético de una empresa individual, Merck Company y del índice de acciones Standard & Poor's 500, índice que representa los rendimientos de un portafolio de acciones. De hecho, el rendimiento obtenido en el pasado no garantiza un rendimiento promedio en el futuro, a lo más, solo sería un resultado posible.

El promedio aritmético en ambas muestras es similar y uno puede ser indiferente a invertir solo en Merck Company o en portafolios. Sin embargo, utilizando la técnica de la varianza, observaremos la volatilidad correspondiente.

Cálculo de la varianza de los rendimientos

Según Plá (2000) «Markowitz mostraba que la varianza del retorno esperado era una medida de riesgo que tenía significado bajo una serie de asunciones racionales y no demasiado restrictivas y derivó las fórmulas para el cálculo de la varianza del portafolio». Veremos cómo el uso de la varianza aporta al análisis y utilizando la desviación estándar (raíz cuadrada de la varianza) mediremos finalmente el riesgo.

Según el Diccionario de la RAE, se define el *riesgo* como «contingencia o proximidad de un daño[1]». Es claro que esta definición connota la posibilidad de eventos cuyos resultados son negativos. Si se practica acrobacias sobre una cuerda a cien metros de altura, decimos que es riesgoso porque siempre peligra la vida; si juega en un casino o apuesta a la carrera de caballos, está arriesgando su dinero. ¿Ocurre lo mismo con activos financieros especulativos? A pesar de que el móvil sea obtener ganancias o alta rentabilidad, usted *puede* perder su inversión, total o parcialmente.

La expresión matemática para el cálculo de la varianza cuando se dispone de datos históricos viene dada por:

$$Varianza = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(R_{it} - \bar{R})^2}{N-1}$$

Donde R_{it} representa el rendimiento de un activo i durante el periodo t, y $\bar{R}$ el rendimiento medio de la muestra del activo. En la Tabla 2, completamos la información de la tabla anterior agregando la varianza y la desviación estándar. Veamos.

Tabla 2.
Rendimiento anual, media, varianza y desviación estándar.

Año	Merck Company	S&P 500
2004	-29	10.7
2005	-11.2	28.2
2006	-1.2	-21.6
2007	-36	-12.1
2008	41.8	-9.8
2009	-7.5	20.4
2010	41.3	28.7
2011	35.6	33.5
2012	24	21.8
2013	76.5	38
Promedio	**13.43**	**13.78**
Varianza	1.296%	444.60%
Desv. estándar	36%	21.90%

Nota: Datos tomados de Graham et al. (2010)

[1] https://dle.rae.es/riesgo?m=form

El cálculo de la varianza y la desviación estándar para Merck Company según la fórmula sería:

$$\sigma^2_{Merck} = \frac{(-29\% - 13{,}4\%)^2 + (-11{,}2 - 13{,}4\%)^2 + \cdots (76{,}5 - 13{,}4\%)^2}{10 - 1} = \ 1\,296\%^2$$

Luego, al sacar la raíz cuadrada se obtiene una desviación estándar 36%.

Realizando el mismo procedimiento, obtenemos la varianza y luego desviación estándar para S&P 500:

$$\sigma^2_{S\&P500} = \frac{(10{,}7\% - 13{,}8\%)^2 + (28{,}2\% - 13{,}8\%)^2 + \cdots (38\% - 13{,}8\%)^2}{10 - 1} = \ 444{,}6\%^2$$

Por lo tanto, al sacar raíz cuadrada obtenemos una desviación estándar de 21,1% para S&P500.

Haciendo un resumen según información de la tabla 2, observamos que los *rendimientos* de la acción individual y del índice S&P500 son muy similares; sin embargo, la *volatilidad de los rendimientos* de Merck ($\sigma_{Merck} = 36\%$) es mucho mayor que la volatilidad de los rendimientos de un portafolio de acciones como el índice S&P500 ($\sigma_{S\&P500} = 21{,}1\%$). Markowitz demuestra el porqué de esta diferencia. Lo veremos más adelante.

¿Cómo se ha de interpretar la varianza y la desviación estándar? Tenga en cuenta que la varianza y la desviación estándar son medidas estadísticas de dispersión. Así, «cuanto mayor sean la varianza y el desvío estándar, más dispersos estarán los rendimientos observados alrededor del promedio» (Dumrauf, 2010). Su utilidad está cuando comparamos los resultados de dos o más activos entre sí. Por ejemplo, si observa que la acción A tiene $\bar{R} = 12\%$ y $\sigma = 64\%$ y que la acción B tiene $\bar{R} = 12\%$ y $\sigma = 18\%$ ¿por cuál optaría usted? Por la acción B. La σ histórica se puede usar solo como una estimación de la σ futura.

B. Cuando se hace uso de las probabilidades en la elección de un portafolio

Empezamos definiendo una *variable aleatoria*. Según Anderson, Sweeney y Williams (2011) «una variable aleatoria es una descripción numérica de los resultados de un experimento». Por ejemplo, cuando lanzamos un dado (el experimento), existen solo seis resultados posibles y cada resultado se asocia con una probabilidad. Esta probabilidad indica la posibilidad de un resultado.

Court y Williams (2011) señalan que «las probabilidades pueden definirse un valor numérico que representa la posibilidad que un determinado evento ocurra». Tres características mínimas serán necesario tomar en cuenta:

$$0 \ \leq P(A) \ \leq 1$$

$$P\ (A) + P\ (A') = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Asociado al concepto de probabilidad está el de *distribución de probabilidad*. «Una distribución de probabilidad muestra todos los resultados posibles de un experimento y la probabilidad asociada a cada uno de ellos» (Lind, Marchal y Wathen, 2012). En una gráfica, los valores de la variable aleatoria se ubican en el eje horizontal y la probabilidad asociada con estos valores se muestran en el eje vertical, tal como se señalan Anderson et. al. (2011).

A continuación, veremos una medida de ubicación y de dispersión en el contexto de distribuciones de probabilidad discreta. Este conocimiento es útil para ampliar nuestro modelo de rendimiento y riesgo de un portafolio.

a. La media y el rendimiento esperado de un activo financiero

Según Lind et al. (2012) «la *media* constituye un valor típico para representar la posición central de una distribución de probabilidad. Es el valor promedio a la larga de la variable aleatoria». A la *media* se le denomina también como *valor esperado*. Técnicamente, a cada posible valor que asuma la variable aleatoria se le pondera por su probabilidad correspondiente. Veamos:

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)x_i$$

Donde x_i es la variable aleatoria y $P(x_i)$ es la probabilidad asociada a x_i.

Ahora veamos una primera aplicación. Como se aprecia en la tabla 3, a partir de un precio conocido el día hoy, es posible conjeturar escenarios posibles con respecto al precio de la acción al final de un año. El valor de los rendimientos se puede tomar de data histórica o del conocimiento de asesores financieros; asimismo, la probabilidad asignada suele ser materia de asesores.

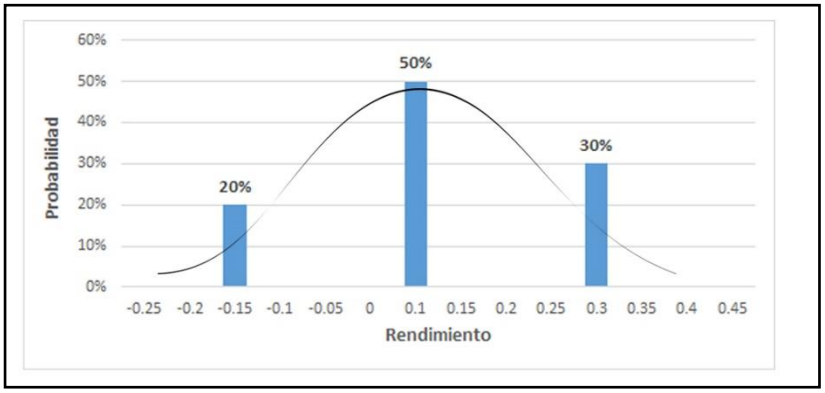
Tabla 3.
Distribución de probabilidad

Precio actual de la acción A	***Escenarios***	***Distribución de probabilidad***	
	Precio después de un año de la acción A	Rendimiento	Probabilidad
100	130	0.3	30%
	110	0.1	50%
	85	-0.15	20%

Nota: Elaboración propia.

Veamos cómo se presenta la *distribución de probabilidad* que combina rendimiento y probabilidad.

Imagen 3.
Distribución de probabilidad



Nota: Elaboración propia.

El cálculo del rendimiento esperado (media) queda determinado por:

$$\text{Rendimiento esperado} = E(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)x_i$$

$$E\ (x) = 30\%(0.3) + 50\%(0.1) + 20\%(-0.15)$$

$$E(x) = 11\%$$

Podemos también a calcular el rendimiento esperado de un activo en donde establecemos ex ante, determinada probabilidad del futuro desempeño de la economía o el nivel de demanda de los productos de una empresa.

Tabla 4
Rendimientos esperados bajos distintos escenarios del estado de la economía

Estado de la economía	*Distribución de probabilidad*		Valor ponderado
	Probabilidad	Rendimiento	
	(1)	(2)	(1) x (2)
Auge	30%	0.35	0.11
Normal	50%	0.12	0.06
Recesión	20%	0.08	0.02
		Rendimiento esperado =	**18%**

Nota: Elaboración propia

Tabla 5.
Rendimientos esperados bajos distintos escenarios de demanda de un producto

Demanda de un producto	*Distribución de probabilidad*		Valor ponderado
	Probabilidad	Tasa de rendimiento	
	(1)	(2)	(1) x (2)
Fuerte	40%	0.35	0.14
Normal	35%	0.12	0.04
Débil	25%	0.08	0.02
		Rendimiento esperado =	**20%**

Nota: Elaboración propia

b. Varianza esperada y la desviación estándar de un activo financiero

Sabemos ya que las medidas de volatilidad son la varianza y la desviación estándar. Según Dumrauf (2010) «cuanto mayor sean la varianza y el desvío estándar, más dispersos estarán los rendimientos observados alrededor del promedio». En el contexto de cuantificar el riesgo de una distribución de probabilidad, la fórmula que usaremos para calcular la varianza es:

$$Var\ (x) = \ \sigma^2 = \sum P(x)(x-\mu)^2$$

siendo la desviación estándar (DS) la raíz cuadrada de la varianza:

$$DS(x) = \ \sigma = \sqrt{Var(x)}$$

En una situación hipotética en donde el rendimiento de un activo financiero carece de riesgo, observaremos que dicho rendimiento no se desvía de su media. Por lo tanto, «la varianza es una medida de cómo se "dispersa" la distribución del rendimiento» (Berk y DeMarzo, 2008).

Con la información de la Tabla 3, procedamos al cálculo de la varianza y la desviación estándar respectivamente. Veamos:

$$Var(x) = 30\%(0.3-0.11)^2 + 50\%(0.1-0.11)^2 + 20\%(-0.15-0.11)^2 = 0.0244$$

Finalmente, la desviación estándar del rendimiento es:

$$DS(x) = \ \sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{0{,}0244} = 15{,}62\%$$

Como se dará cuenta, la desviación estándar se presenta en la misma unidad de medida que el rendimiento.

3.2. Estadística para la construcción de un portafolio

Con respecto al portafolio o cartera, Sachs y Larraín (1994) precisan que «un activo que es en extremo riesgoso en sí mismo puede resultar bastante seguro dentro de un portafolio que tiene otros activos que compensan su riesgo». Es claro entonces que los

analistas e inversionistas buscarán conformar una canasta de activos que combine y cuantifique la totalidad del rendimiento del portafolio (tasa esperada de retorno) y su riesgo (representado por su varianza o desviación estándar). El medio para tal fin es la denominada *diversificación*. Asignar el capital de un inversionista entre variados títulos al portafolio, posibilita compensar con las ganancias de un activo, las pérdidas de otro activo. Así entonces, se disminuye la variabilidad de los rendimientos posibles.

A. Retorno esperado del portafolio

Hasta ahora hemos aprendido que, si un activo financiero se enfrenta a varios escenarios, podemos calcular su retorno esperado r^ecomo la suma ponderada de sus rendimientos por sus probabilidades asociadas; así, si el activo rinde un retorno de r_1 con probabilidad p_1, un retorno r_2 con p_2, y así hasta r_n con p_1, entonces el r^e del activo viene definido por:

$$r^e = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots + p_n r_n$$

Ahora se introducirá en el modelo, cuánto de riqueza (efectivo) el inversionista va a asignar a cada activo. Dado N activos que componen un portafolio, el inversionista asignará del total de su riqueza W_0, fracciones de esta entre los distintos activos. A dicha participación (peso) le denotaremos por w. La expresión $w_i W_0$ denota la fracción de la riqueza invertida en el activo i. Al igual que las probabilidades, tenemos que:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_N = 1$$

Ahora que tenemos información de r^e y w_i, ¿cómo se calcula el rendimiento de un portafolio. En palabras de Sachs y Larraín (1994) «el retorno esperado del portafolio r_p^e se calcula entonces como el promedio ponderado de los retornos esperados de los N activos que forman parte del portafolio, en que las ponderaciones corresponden a las fracciones del portafolio invertidas en cada uno de los activos». Entonces, la expresión matemática para el retorno esperado de portafolio viene dada por:

$$r_p^e = w_1 r_1^e + w_2 r_2^e + \cdots + w_N r_N^e$$

B. Varianza y desviación estándar del portafolio

En cuanto a la varianza y desviación estándar del portafolio, si asumimos un portafolio compuesto por dos activos financieros, A y B, tenemos:

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B Cov_{A,B}$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B Cov_{A,B}}$$

Donde:

$\sigma_p^2 = Varianza\ del\ portafolio$

$\sigma_p = desviación\ estádar\ del\ portafolio$

$w_A, w_B = pesos\ o\ proporcioes\ invertidas\ en\ los\ activos\ A\ y\ B$

$\sigma_A, \sigma_B = desviaciones\ estándar\ de\ los\ retornos\ de\ los\ activos\ A\ y\ B$

$Cov_{A,B} = covarianza\ de\ los\ retornos\ de\ los\ activos\ A\ y\ B$

Nos queda solamente recordar el significado de la covarianza y cómo se calcula. La covarianza «es una medida descriptiva de la asociación lineal entre dos variables»

(Anderson et. al., 2012). Para el analista financiero que está interesado en diversificar un portafolio, interesa cómo se van relacionando los activos entre sí, tomados de dos en dos. Veamos la expresión matemática de la covarianza:

$$Cov_{A,B} = \sum_{i=1}^{n} P_i[r_A - E(r_{A)}][r_B - E(r_{B)}]$$

Un valor positivo para la covarianza significa una relación o asociación lineal entre el activo A y el activo B, es decir, si aumenta el valor A, también lo hace B. Al contrario, un valor negativo para la covarianza significa una asociación lineal negativa entre A y B, es decir, si el valor de la acción A cae, este es compensado con el alza del activo B.

Para finalizar, le dejamos una tabla con los datos necesarios para calcular la rentabilidad y riesgo del portafolio compuesto por solo dos acciones.

Tabla 6.
Rendimientos y pesos de un portafolio

Escenario	Probabilidad	Acción A	Acción B
Auge	20%	61.00%	-39.85%
Normal	50%	20.00%	10.00%
Recesión	30%	-59.00%	48.75%
Pesos		**58.00%**	**42.00%**

Nota: Elaboración propia.

Con la información de la Tabla 6, se ha procedido a realizar los cálculos respectivos dando como resultado la siguiente información:

Imagen 4.
Resultados finales

	C	D	E	F	H
2	**Escenario**	**Probabiidad**	**Acción A**	**Acción B**	***Rendto x Peso***
3	Auge	20%	61.00%	-39.85%	18.64%
4	Normal	50%	20.00%	10.00%	15.80%
5	Recesión	30%	-59.00%	48.75%	-13.75%
6	Pesos		**58.00%**	**42.00%**	
8	**Retorno esperado**		4.50%	11.66%	
9	**Desviación estandar**		44.36%	30.74%	
10	Pesos		**58.00%**	**42.00%**	
12			**Acción A**	**Acción B**	
13	Pesos		58.00%	42.00%	
14	Retorno esperado		4.50%	11.66%	
16	**Retorno esperado del portafolio**			**7.51%**	
17	**Varianza del portafolio**			**2.35%**	
18	**Desviación estándar del portafolio**			**15.33%**	

	J	K	L	M	N
2	**Acción A**				
3	Escenario	Probabilidad	Acción A	r - E(r)	**r - E(r)^2**
4	Auge	20%	61.00%	56.50%	31.92%
5	Normal	50%	20.00%	15.50%	2.40%
6	Recesión	30%	-59.00%	-63.50%	40.32%
10	**Acción B**				
11	Escenario	Probabilidad	Acción B	r - E(r)	**r - E(r)^2**
12	Auge	20%	-39.85%	-51.51%	26.53%
13	Normal	50%	10.00%	-1.66%	0.03%
14	Recesión	30%	48.75%	37.10%	13.76%

Nota: Elaboración propia.

Dejamos al lector la verificación de los resultados presentados.

4. Conclusiones

El contenido presenta en el presente documento de trabajo nos permite arribar a las siguientes conclusiones:

- Todo inversionista individual o institucional, busca incrementar su patrimonio, su riqueza. Una de las formas es a través del mercado financiero, en estricto, negociando diversos instrumentos financieros como acciones, bonos, entre otros.
- La rentabilidad de un activo financiero viene dada por la expectativa de un incremento en su valor de mercado futuro. Aunque data histórica de las rentabilidades es ilustrativa, de no por sí no garantiza que tenga el mismo desempeño en el futuro.
- Dos variables son relevantes para todo inversionista al momento de decidir realizar una inversión en activos financieros: un indicador de rentabilidad y un indicador de riesgo, siendo justamente la rentabilidad esperado y la desviación estándar: [E(Rp), σ(Rp)].
- Harry Markowitz amplia el análisis de rentabilidad y riesgo para activos individuales al llevarlo al análisis del portafolio o cartera, lo cual permite cuantificar que la adición de más activos no relacionados al portafolio posibilita la reducción del riesgo del portafolio.
- La incorporación de técnicas estadísticas al análisis de selección de activos financieros para construir un portafolio, aporta objetividad a los inversionistas y analistas.

5. Referencias bibliográficas

Berk, J. & DeMarzo, P. (2008). *Finanzas corporativas*. Pearson Educación.

Ehrhardt, M. & Brigham, E. (2007). *Finanzas corporativas* (2da ed.). Cengage Learning.

Gitman, L. & Zutter, Ch. (2012). *Principios de administración financiera* (12a ed.). Pearson educación

Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.

Mendoza, R. (2014). *Eficiencia financiera en los portafolios de inversión de las AFP en el Perú: un enfoque robusto de multifondos* (Documento de Trabajo N° 2014-005). Banco Central de Reserva del Perú.

Pereda, J. (2005). *Estimación de la Frontera Eficiente para las AFP en el Perú y el Impacto de los Límites de Inversión: 1995-2004* (Documento de Trabajo N.º 2007:09). Banco Central de Reserva del Perú.

Ross, E., Westerfield, R. & Jordan, B. (2010). *Fundamentos de finanzas corporativas* (9a ed.). McGrawHill.

.